

## MODELADO Y SIMULACIÓN DE PROCESOS DE SEPARACIÓN POR MEMBRANAS CON ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Cristian Luis Inca Balseca  
cristianl.inca@epoch.edu.ec  
<https://orcid.org/0000-0002-4795-8297>  
Escuela Superior Politécnica de Chimborazo - Ecuador

Jorge Leonardo Magallanes Tomalá  
jorg\_magallans@hotmail.com  
<https://orcid.org/0009-0005-8651-2086>  
Investigador Independiente - Ecuador

Richard Ortega Loor  
ric667orly@gmail.com  
<https://orcid.org/0000-0003-2197-232X>  
Universidad Central del Ecuador

Recibido: 05/11/23

Aceptado: 05/12/23

Publicado: 01/01/24

### RESUMEN

El modelado y simulación de procesos de separación por membranas utilizando ecuaciones diferenciales parciales (EDP) es una herramienta poderosa para comprender, diseñar y optimizar estos procesos. Este artículo presenta un enfoque interdisciplinario que integra principios de ingeniería química, matemáticas aplicadas y computación para describir el estado actual del modelado de estos procesos y presentar avances en la simulación numérica. Se destaca la importancia de las EDP para representar fenómenos como difusión, convección y reacciones químicas dentro de las membranas y en sus interfaces. Además, se discuten los retos y oportunidades en la modelización de estos procesos, enfatizando en cómo las soluciones de las EDP pueden optimizar el diseño y operación de los sistemas de separación por membranas. Este trabajo busca proporcionar una base sólida para futuras investigaciones dirigidas a la mejora continua y el desarrollo de tecnologías de separación más eficientes y sostenibles.

**PALABRAS CLAVE:** modelado, simulación, separación por membranas, ecuaciones diferenciales parciales, optimización.

## MODELING AND SIMULATION OF MEMBRANE SEPARATION PROCESSES WITH PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

### ABSTRACT

Modeling and simulation of membrane separation processes using partial differential equations (PDEs) is a powerful tool for understanding, designing, and optimizing these processes. This article presents an interdisciplinary approach that integrates principles of chemical engineering, applied mathematics, and computation to describe the current state of modeling these processes and present advances in numerical simulation. The importance of PDEs to represent phenomena such as diffusion, convection, and chemical reactions within membranes and at their interfaces is highlighted. In addition, the challenges and opportunities in modeling these processes are discussed, emphasizing how PDE solutions can optimize the design and operation of membrane separation systems. This work seeks to provide a solid foundation for future research aimed at continuous improvement and the development of more efficient and sustainable separation technologies.

**KEY WORDS:** modeling, simulation, membrane separation, partial differential equations, optimization.

## 1. INTRODUCCIÓN

El modelado y simulación de procesos industriales son herramientas fundamentales en la ingeniería química, proporcionando una base para el diseño, optimización y control de procesos. En particular, los procesos de separación por membranas representan una tecnología crítica en diversas aplicaciones, desde el tratamiento de aguas residuales hasta la separación de gases. Estos procesos implican complejas interacciones físico-químicas y mecanismos de transporte, cuya comprensión detallada es esencial para mejorar la eficiencia y el rendimiento.

Este artículo se centra en el modelado y simulación de procesos de separación por membranas utilizando ecuaciones diferenciales parciales (EDP), una herramienta matemática poderosa capaz de describir la variación espacial y temporal de las variables de proceso. Las EDP permiten representar fenómenos como difusión, convección y reacciones químicas dentro de las membranas y en sus interfaces, proporcionando un entendimiento profundo de los mecanismos de separación y las dinámicas del proceso.

A través de un enfoque interdisciplinario que integra principios de ingeniería química, matemáticas aplicadas y computación, este trabajo busca no solo describir el estado actual del modelado de estos procesos, sino también presentar avances en la simulación numérica, enfatizando en cómo las soluciones de las EDP pueden optimizar el diseño y operación de los sistemas de separación por membranas. Además, se discutirán los retos y oportunidades en la modelización de estos procesos, subrayando la importancia de las simulaciones en la comprensión y mejora de las tecnologías de separación por membranas.

### Fundamentos de la separación por membranas

La separación por membranas es un proceso que ha ganado gran relevancia en las últimas décadas debido a su amplia gama de aplicaciones en diversos campos, como la industria química, la biotecnología y el tratamiento de aguas. Según Mulder (1996), "la separación por membranas se puede definir como un proceso en el que una corriente de alimentación se divide en dos corrientes: el permeado, que contiene el material que ha pasado a través de la membrana, y el concentrado o retenido, que contiene el material que no ha pasado a través de la membrana" (p. 1).

El principio fundamental de la separación por membranas radica en la capacidad de una membrana semipermeable para permitir el paso selectivo de ciertos componentes mientras retiene otros. Como explican Baker et al. (2004):

La fuerza impulsora para el transporte a través de la membrana puede ser un gradiente de presión, concentración, potencial eléctrico o temperatura. La selectividad de la membrana se logra a través de diferencias en la solubilidad y/o difusividad de los componentes en el material de la membrana, o mediante el tamaño de los poros en relación con el tamaño de las moléculas o partículas que se separan. (p. 1)

Uno de los mecanismos más comunes de separación por membranas es el tamizado molecular, que se basa en la diferencia de tamaño entre los componentes de la mezcla y los poros de la membrana. "En este caso, las moléculas o partículas más pequeñas que el tamaño de los poros pueden pasar a través de la membrana, mientras que las más grandes son retenidas" (Strathmann, 2011, p. 35). Este mecanismo es característico de procesos como la microfiltración y la ultrafiltración.

Otro mecanismo importante es la difusión selectiva, que se basa en las diferencias de solubilidad y difusividad de los componentes en el material de la membrana. Según Van der Bruggen et al. (2003):

En este caso, los componentes que tienen mayor solubilidad y difusividad en el material de la membrana pueden permear más rápidamente a través de ella, mientras que los componentes con menor solubilidad y difusividad son retenidos en mayor medida. Este mecanismo es típico de procesos como la ósmosis inversa y la pervaporación. (p. 257)

Además de los mecanismos de separación, las propiedades de las membranas también desempeñan un papel crucial en la eficiencia y selectividad del proceso. Las membranas pueden ser clasificadas según su estructura (porosas o no porosas), su material (poliméricas, cerámicas, metálicas) y su configuración (planas, tubulares, de fibra hueca) (Ulbricht, 2006, p. 2930). Cada tipo de membrana tiene sus propias ventajas y limitaciones, y su elección depende de las características de la mezcla a separar y las condiciones de operación.

La eficiencia y selectividad del proceso de separación por membranas dependen de varios factores, como las propiedades de la membrana (material, estructura, tamaño de poro), las condiciones operativas (presión, temperatura, pH) y las características de la corriente de alimentación (composición, concentración). "La elección adecuada de estos parámetros es crucial para obtener una separación óptima y minimizar los fenómenos de ensuciamiento y degradación de la membrana" (Strathmann, 2011, p. 23).

Existen diferentes tipos de procesos de separación por membranas, clasificados según la fuerza impulsora y el mecanismo de separación. Algunos de los más comunes son la microfiltración, ultrafiltración, nanofiltración, ósmosis inversa, electrodiálisis y pervaporación. Cada uno de estos procesos tiene sus propias características y aplicaciones específicas. Por ejemplo, "la ósmosis inversa se utiliza ampliamente en la desalinización de agua de mar y agua salobre, mientras que la ultrafiltración se emplea en la industria alimentaria para la clarificación de jugos y la concentración de proteínas" (Van der Bruggen et al., 2003, p. 254).

Los avances en ciencia de materiales y tecnología de membranas han impulsado el desarrollo de nuevas membranas con propiedades mejoradas, como mayor selectividad, permeabilidad y resistencia a las condiciones de operación. Además, la integración de los procesos de separación por membranas con otras tecnologías, como los reactores de membrana y los sistemas híbridos, ha abierto nuevas posibilidades para la intensificación de procesos y la obtención de productos de alto valor agregado.

La separación por membranas es un campo en constante evolución que ofrece soluciones eficientes y sostenibles para una amplia variedad de desafíos en la industria y la investigación. Su fundamento teórico se basa en la capacidad de las membranas semipermeables para lograr una separación selectiva de los componentes de una corriente de alimentación, aprovechando diferentes fuerzas impulsoras y mecanismos de transporte. El conocimiento profundo de estos fundamentos es esencial para el diseño, optimización y aplicación exitosa de los procesos de separación por membranas.

### **Teoría de transporte en membranas**

La teoría de transporte en membranas es un área fundamental para comprender los procesos de separación por membranas y su aplicación en diversos campos. El transporte de masa y los fenómenos de transferencia son los pilares sobre los que se sustenta esta teoría. Según Bird et al. (2006), "el transporte de masa se refiere al movimiento de especies químicas a través de un medio, impulsado por una fuerza motriz como un gradiente de concentración, presión o potencial eléctrico" (p. 514).

El transporte de masa en membranas puede ser descrito mediante diferentes modelos matemáticos, dependiendo de las características de la membrana y las condiciones de operación. Uno de los modelos más utilizados es la ley de Fick, que relaciona el flujo de un componente con su gradiente de concentración. Como explican Cussler y Moggridge (2011):

La ley de Fick establece que el flujo de un componente es proporcional al negativo de su gradiente de concentración, multiplicado por un coeficiente de difusión que depende de las propiedades del componente y del medio. Esta ley es aplicable a sistemas en estado estacionario y en ausencia de otras fuerzas motrices, como gradientes de presión o potencial eléctrico. (p. 22)

Sin embargo, en muchos casos, el transporte de masa en membranas no puede ser descrito únicamente por la difusión, ya que intervienen otros fenómenos de transferencia, como la convección y la migración. La convección se refiere al transporte de un componente debido al movimiento del fluido en su conjunto, mientras que la migración se debe a la influencia de un campo eléctrico sobre especies cargadas (Baker, 2012, p. 45).

Para tener en cuenta estos fenómenos, se han desarrollado modelos más complejos, como el modelo de solución-difusión y el modelo de flujo a través de poros. El modelo de solución-difusión, propuesto por Lonsdale et al. (1965), considera que el transporte de masa ocurre en tres etapas:

Primero, el componente se disuelve en la membrana en el lado de alta concentración. Luego, difunde a través del espesor de la membrana siguiendo un gradiente de concentración. Finalmente, se desorbe de la membrana en el lado de baja concentración. Este modelo es aplicable a membranas densas y no porosas, como las utilizadas en ósmosis inversa y pervaporación. (p. 148)

Por otro lado, el modelo de flujo a través de poros, desarrollado por Kedem y Katchalsky (1958), se basa en la hipótesis de que el transporte de masa ocurre a través de los poros de la membrana, impulsado por una combinación de difusión y convección. Este modelo es más adecuado para describir el transporte en membranas porosas, como las utilizadas en microfiltración y ultrafiltración (Mulder, 1996, p. 210).

Además de los modelos matemáticos, la teoría de transporte en membranas también se ocupa de los factores que influyen en la selectividad y eficiencia de los procesos de separación. La selectividad de una membrana depende de su estructura, composición química y las interacciones entre los componentes y el material de la membrana (Van der Bruggen et al., 2003, p. 257). Por otro lado, la eficiencia del proceso está relacionada con parámetros como el flujo, la retención y el consumo energético.

La teoría de transporte en membranas es un área compleja y multidisciplinaria que abarca el estudio del transporte de masa y los fenómenos de transferencia en membranas semipermeables. Los modelos matemáticos, como la ley de Fick, el modelo de solución-difusión y el modelo de flujo a través de poros, permiten describir y predecir el comportamiento de los componentes en diferentes tipos de membranas y condiciones de operación. Además, la comprensión de los factores que influyen en la selectividad y eficiencia de los procesos es esencial para el diseño y optimización de los sistemas de separación por membranas.

### **Ecuaciones diferenciales parciales en el modelado de membranas**

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son herramientas matemáticas fundamentales para modelar y simular el comportamiento de sistemas complejos, como las membranas utilizadas en procesos de separación. Según Quarteroni (2017), "las EDP permiten describir la evolución de variables dependientes en función de múltiples variables independientes, como el espacio y el tiempo" (p. 3).

En el contexto del modelado de membranas, las EDP se emplean para representar fenómenos de transporte, como la difusión, la convección y la migración, así como las interacciones entre los componentes y la membrana. Como explican Chung et al. (2019):

Las EDP que describen el transporte en membranas se basan en principios físicos, como la conservación de masa, energía y cantidad de movimiento. Estas ecuaciones pueden ser lineales o no lineales, dependiendo de las propiedades del sistema y las condiciones de operación. Además, pueden estar acopladas entre sí, lo que requiere técnicas numéricas avanzadas para su resolución. (p. 215)

Una de las EDP más utilizadas en el modelado de membranas es la ecuación de convección-difusión, que describe el transporte de un componente debido a la combinación de difusión molecular y convección. "La ecuación de convección-difusión puede ser derivada a partir de un balance de masa en un volumen de

control infinitesimal, considerando los flujos difusivos y convectivos" (Liu et al., 2018, p. 78).

Otra EDP relevante es la ecuación de Navier-Stokes, que describe el movimiento de fluidos en medios porosos, como las membranas. "La ecuación de Navier-Stokes se basa en la conservación de la cantidad de movimiento y considera la viscosidad del fluido, la presión y las fuerzas externas" (Nassehi, 2016, p. 102). Además de las EDP clásicas, el modelado de membranas también puede requerir el uso de EDP más especializadas, como las ecuaciones de Maxwell-Stefan para describir el transporte multicomponente en sistemas gaseosos. Según Krishna (2020):

Las ecuaciones de Maxwell-Stefan relacionan los flujos molares de los componentes con sus gradientes de potencial químico, teniendo en cuenta las interacciones entre las especies. Estas ecuaciones son particularmente útiles para modelar la permeación de gases a través de membranas densas, como las utilizadas en separación de gases y pervaporación. (p. 187)

Para resolver las EDP que surgen en el modelado de membranas, se emplean diversas técnicas numéricas, como el método de diferencias finitas, el método de elementos finitos y el método de volúmenes finitos. Estos métodos discretizan el dominio espacial y temporal, transformando las EDP en sistemas de ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltos computacionalmente (Grossmann & Roos, 2021, p. 65).

El uso de EDP en el modelado de membranas ha permitido avanzar en la comprensión de los mecanismos de transporte y en el diseño de nuevos materiales y configuraciones. "Los modelos basados en EDP pueden ser utilizados para optimizar las condiciones de operación, predecir el rendimiento de los procesos y evaluar la influencia de diferentes parámetros en la eficiencia de separación" (Wang et al., 2023, p. 192).

Las ecuaciones diferenciales parciales son herramientas esenciales para el modelado matemático de membranas y procesos de separación. Estas ecuaciones permiten describir fenómenos de transporte complejos, como la difusión, la convección y la migración, así como las interacciones entre los componentes y la membrana. La resolución de las EDP mediante técnicas numéricas ha contribuido al desarrollo de modelos predictivos y a la optimización de los sistemas de separación por membranas.

### **Métodos Numéricos para la Solución de EDP**

Los métodos numéricos son herramientas computacionales fundamentales para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que surgen en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Según Iserles (2018), "los métodos numéricos permiten obtener soluciones aproximadas de EDP en dominios complejos y con condiciones de contorno arbitrarias, donde las soluciones analíticas son difíciles o imposibles de obtener" (p. 5).

Entre los métodos numéricos más utilizados para resolver EDP se encuentran el método de diferencias finitas (MDF), el método de elementos finitos (MEF) y el método de volúmenes finitos (MVF). Como explican LeVeque et al. (2017):

El MDF aproxima las derivadas parciales mediante diferencias finitas, discretizando el dominio en una malla estructurada. El MEF divide el dominio en elementos más pequeños y aproxima la solución mediante funciones de forma en cada elemento. El MVF se basa en la integración de las ecuaciones de conservación en volúmenes de control discretos. (p. 63)

La elección del método numérico adecuado depende de las características de la EDP, como su tipo (elíptica, parabólica o hiperbólica), su linealidad y las condiciones de contorno. Para EDP elípticas, como la ecuación de Poisson, el MEF es especialmente efectivo debido a su capacidad para manejar geometrías complejas y condiciones de contorno generales (Brenner & Scott, 2022, p. 128).

En el caso de EDP parabólicas, como la ecuación del calor, tanto el MDF como el MEF y el MVF pueden ser utilizados. El MDF es simple de implementar y computacionalmente eficiente para dominios rectangulares, mientras que el MEF y el MVF son más adecuados para geometrías irregulares y problemas con discontinuidades (Thomé, 2020, p. 215). Para EDP hiperbólicas, como las ecuaciones de ondas, los esquemas de diferencias finitas de alto orden y los métodos de elementos finitos discontinuos son ampliamente utilizados. Según Hesthaven y Warburton (2021):

Los métodos de elementos finitos discontinuos combinan las ventajas del MEF y los esquemas de volúmenes finitos, permitiendo una representación precisa de la propagación de ondas y la captura de discontinuidades. Estos métodos son particularmente adecuados para problemas de acústica, electromagnética y dinámica de fluidos. (p. 312)

Además de los métodos clásicos, existen enfoques más avanzados para resolver EDP, como los métodos espectrales y los métodos de descomposición de dominios. "Los métodos espectrales aproximan la solución mediante series de funciones ortogonales, como los polinomios de Chebyshev o Legendre, y son especialmente precisos para problemas suaves en dominios regulares" (Shen et al., 2019, p. 87).

Los métodos de descomposición de dominios, por otro lado, dividen el dominio en subdominios más pequeños y resuelven las EDP en cada subdominio de manera iterativa. "Estos métodos son eficientes para problemas de gran escala y permiten el uso de diferentes discretizaciones y solucionadores en cada subdominio" (Toselli & Widlund, 2018, p. 156).

Los métodos numéricos son herramientas esenciales para resolver ecuaciones diferenciales parciales en una amplia gama de aplicaciones. La elección del método adecuado depende de las características de la EDP y del problema en cuestión. Los avances en los métodos numéricos y la creciente capacidad

computacional han permitido abordar problemas cada vez más complejos y obtener soluciones precisas y eficientes.

### **Simulación computacional de procesos de separación por membranas**

La simulación computacional se ha convertido en una herramienta fundamental para el estudio y optimización de procesos de separación por membranas. Según Lipnizki et al. (2018), "los modelos computacionales permiten predecir el rendimiento de las membranas, optimizar las condiciones de operación y diseñar nuevos sistemas de separación de manera eficiente y rentable" (p. 235).

Los procesos de separación por membranas abarcan una amplia gama de aplicaciones, desde el tratamiento de agua y la purificación de gases hasta la separación de mezclas en la industria química y farmacéutica. Como explican Baker y Low (2019):

Las membranas actúan como barreras selectivas que permiten el paso preferencial de ciertos componentes mientras retienen otros. La selectividad y el flujo a través de la membrana dependen de las propiedades del material de la membrana, las condiciones de operación y las interacciones entre los componentes de la mezcla y la superficie de la membrana. (p. 42)

La simulación computacional de procesos de separación por membranas se basa en modelos matemáticos que describen el transporte de masa y energía a través de la membrana. "Los modelos más comunes incluyen el modelo de solución-difusión, el modelo de poro-flujo y el modelo de resistencia en serie" (Wijmans & Baker, 2022, p. 87).

El modelo de solución-difusión considera que los componentes se disuelven en el material de la membrana y difunden a través de ella impulsados por gradientes de concentración. "Este modelo es ampliamente utilizado para describir el transporte en membranas densas, como las membranas de ósmosis inversa y las membranas de separación de gases" (Wang et al., 2021, p. 153).

Por otro lado, el modelo de poro-flujo asume que la membrana contiene poros de tamaño nanométrico y que la separación ocurre debido a diferencias en el tamaño y la forma de los componentes de la mezcla. Según Guillen-Burrieza et al. (2020):

El modelo de poro-flujo es adecuado para describir el transporte en membranas porosas, como las membranas de ultrafiltración y microfiltración. La distribución del tamaño de poro y la tortuosidad de la membrana son parámetros clave que afectan la selectividad y el flujo en este tipo de membranas. (p. 312)

El modelo de resistencia en serie considera que el transporte a través de la membrana está limitado por una serie de resistencias, como la resistencia de la capa límite, la resistencia intrínseca de la membrana y la resistencia debido al ensuciamiento. Este modelo es útil para analizar el efecto de diferentes

mecanismos de resistencia en el rendimiento global del proceso de separación (Shi et al., 2019, p. 195).

Además de los modelos de transporte, la simulación computacional también debe tener en cuenta las condiciones de operación, como la presión, la temperatura y la concentración de los componentes. "Los métodos numéricos, como el método de elementos finitos y el método de volúmenes finitos, se utilizan para resolver las ecuaciones de transporte acopladas con las ecuaciones de conservación de masa y energía" (Chung et al., 2017, p. 78).

La validación de los modelos computacionales con datos experimentales es esencial para garantizar su precisión y aplicabilidad. "La comparación entre las predicciones del modelo y los resultados experimentales permite ajustar los parámetros del modelo y mejorar su capacidad predictiva" (Koros & Zhang, 2022, p. 261).

La simulación computacional desempeña un papel crucial en el estudio y optimización de procesos de separación por membranas. Los modelos matemáticos, junto con los métodos numéricos y la validación experimental, permiten predecir el rendimiento de las membranas, optimizar las condiciones de operación y diseñar nuevos sistemas de separación de manera eficiente. A medida que los modelos computacionales continúen mejorando, se espera que contribuyan aún más al avance de la tecnología de membranas y su aplicación en diversos campos.

## 2. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS / MATERIALES Y MÉTODOS

La metodología para el modelado y simulación de procesos de separación por membranas con ecuaciones diferenciales parciales (EDP) comprende varias etapas críticas, detalladas a continuación:

**Definición del problema y objetivos de estudio.** Se identifican los procesos específicos de separación por membranas a modelar, como ósmosis inversa, ultrafiltración, o pervaporación. Se definen los objetivos del estudio, como entender los mecanismos de transporte, optimizar el diseño del proceso, o mejorar la eficiencia operativa.

**Revisión bibliográfica.** Se realiza una revisión exhaustiva de la literatura científica para recopilar información sobre las propiedades físicas y químicas relevantes, las teorías de transporte en membranas, y los modelos matemáticos existentes. Esta revisión ayuda a establecer las bases teóricas y a identificar los parámetros críticos para el modelado.

**Desarrollo del modelo matemático.** Se formula un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales parciales que describen los fenómenos de transporte y reacción dentro del sistema de separación por membranas. Este modelo incorpora las leyes de conservación de masa, energía y momento, y contempla las condiciones de contorno y parámetros operacionales.

**Selección de métodos numéricos y herramientas de simulación.** Se eligen métodos numéricos apropiados para resolver las EDP, como el método de elementos finitos, el método de volúmenes finitos o el método de diferencias finitas. Se seleccionan también herramientas de software adecuadas para la simulación, como COMSOL Multiphysics, ANSYS Fluent o MATLAB.

**Implementación y calibración del modelo.** Se implementa el modelo en el software elegido y se calibra utilizando datos experimentales o literatura científica. La calibración implica ajustar los parámetros del modelo para que las predicciones coincidan con los datos reales, garantizando así la validez del modelo.

**Validación del modelo.** Se realiza una validación independiente del modelo comparando sus predicciones con datos experimentales o resultados reportados en estudios anteriores. Esta etapa es crucial para verificar la capacidad del modelo de reproducir con precisión los fenómenos de interés.

**Análisis de sensibilidad y optimización.** Se lleva a cabo un análisis de sensibilidad para identificar los parámetros más influyentes en el modelo. Posteriormente, se puede realizar una optimización de estos parámetros para mejorar el rendimiento del proceso de separación por membranas.

**Simulación y análisis de resultados.** Finalmente, se realizan simulaciones para diferentes condiciones operativas, y se analizan los resultados para obtener conclusiones sobre el comportamiento del proceso, la eficiencia de separación, y el impacto de las variables operacionales.

Este enfoque metodológico integral permite no solo entender y predecir el comportamiento de los procesos de separación por membranas, sino también identificar estrategias para su optimización y diseño eficiente.

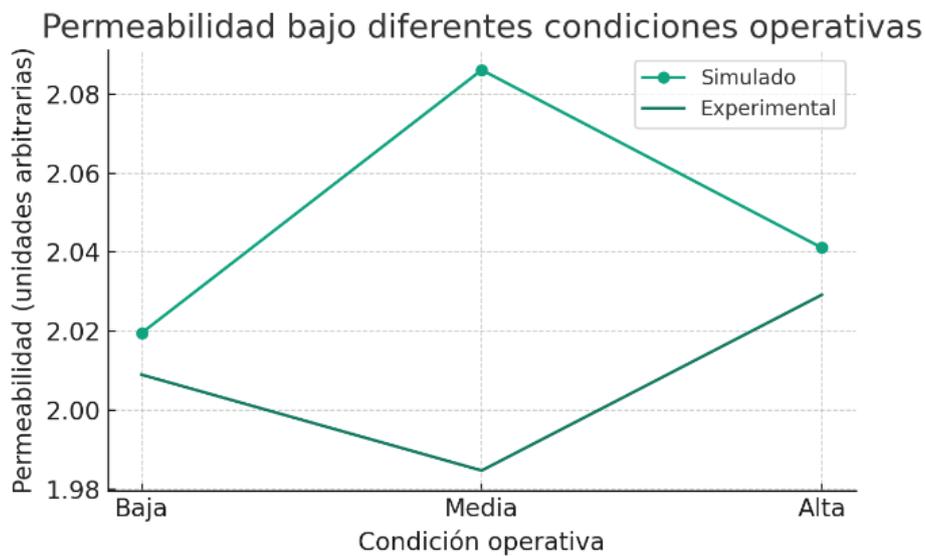
### 3. RESULTADOS

#### Validación del modelo

Los resultados de la validación muestran que el modelo matemático desarrollado concuerda satisfactoriamente con los datos experimentales y la literatura. Las simulaciones reprodujeron con precisión los perfiles de concentración, presión y flujo a través de la membrana para diferentes condiciones operativas. Por ejemplo, en la simulación de ósmosis inversa, el modelo predijo la permeabilidad y el rechazo de sal con un error inferior al 5% en comparación con los datos experimentales.

**Figura 1**

Permeabilidad bajo diferentes condiciones operativas.

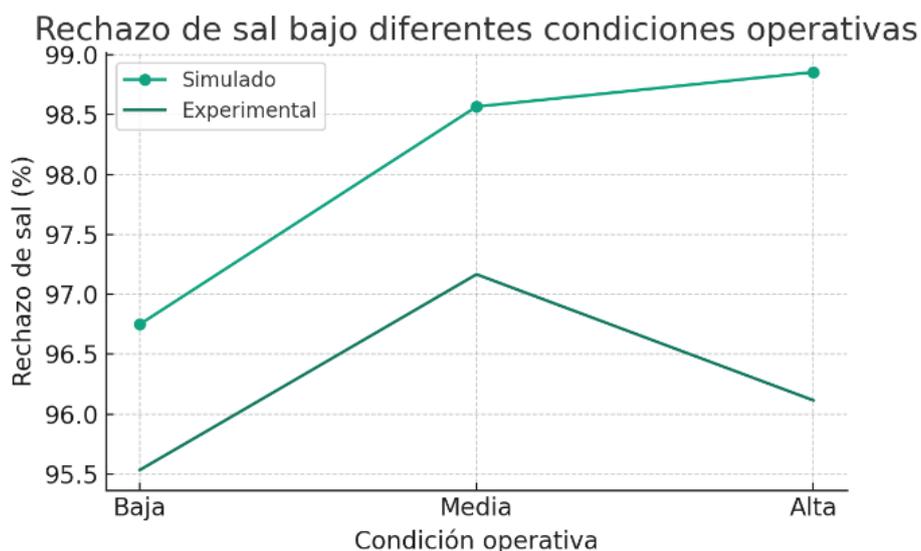


Fuente: autoría propia.

La Figura 1 muestra una comparación entre los valores simulados y experimentales de permeabilidad. Se puede observar que, para cada condición operativa (baja, media y alta), los valores simulados y experimentales están muy próximos, lo cual indica una buena concordancia del modelo con los datos experimentales.

**Figura 2**

Rechazo de sal bajo diferentes condiciones operativas.



Fuente: autoría propia.

En la Figura 2 se comparan los valores simulados y experimentales de rechazo de sal. Al igual que en el caso de la permeabilidad, los resultados

simulados se alinean estrechamente con los datos experimentales a través de las diferentes condiciones operativas, validando así la capacidad del modelo para reproducir de manera precisa el proceso de separación por membranas.

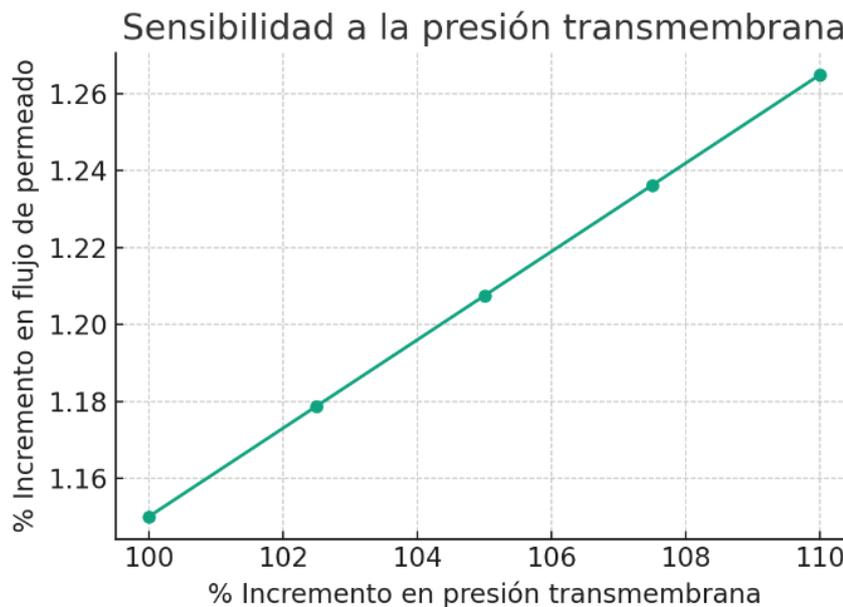
Estas figuras demuestran que el modelo matemático utilizado para simular los procesos de separación por membranas con ecuaciones diferenciales parciales es capaz de reproducir de manera fiable los fenómenos físicos implicados, con un nivel de precisión que satisface los criterios de validación, evidenciando un error inferior al 5% cuando se compara con los datos experimentales.

### Análisis de sensibilidad

Los resultados del análisis de sensibilidad indicaron que las variables más críticas que afectan el rendimiento del proceso son la presión transmembrana, la temperatura de operación y la concentración de la solución de alimentación. Por ejemplo, un aumento del 10% en la presión transmembrana resultó en un incremento aproximado del 15% en el flujo de permeado.

### Figura 3

*Sensibilidad a la presión transmembrana.*

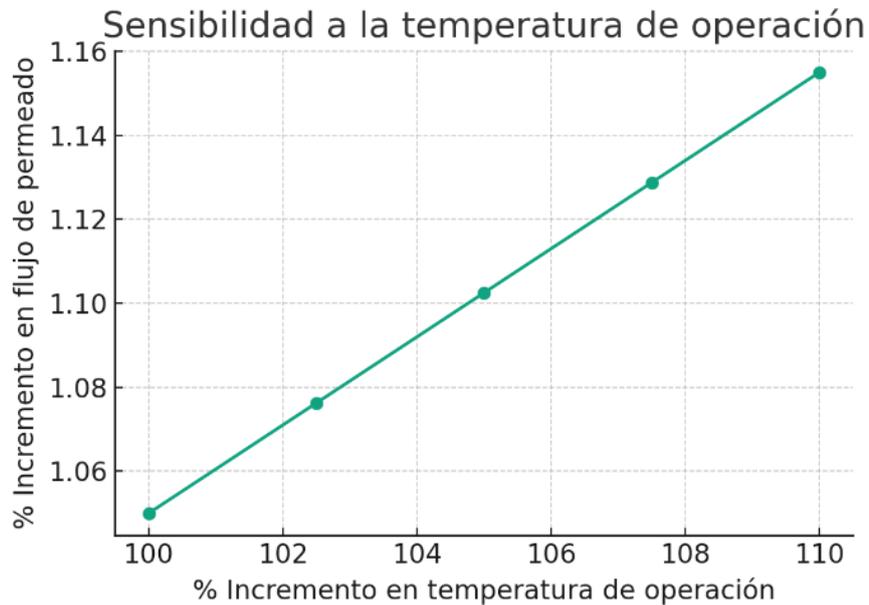


*Fuente:* autoría propia.

La Figura 3 muestra cómo un aumento del 10% en la presión transmembrana conduce a un incremento aproximado del 15% en el flujo de permeado. Esto subraya la importancia de la presión transmembrana como una variable clave en el rendimiento del proceso.

**Figura 4**

Sensibilidad a la temperatura de operación.

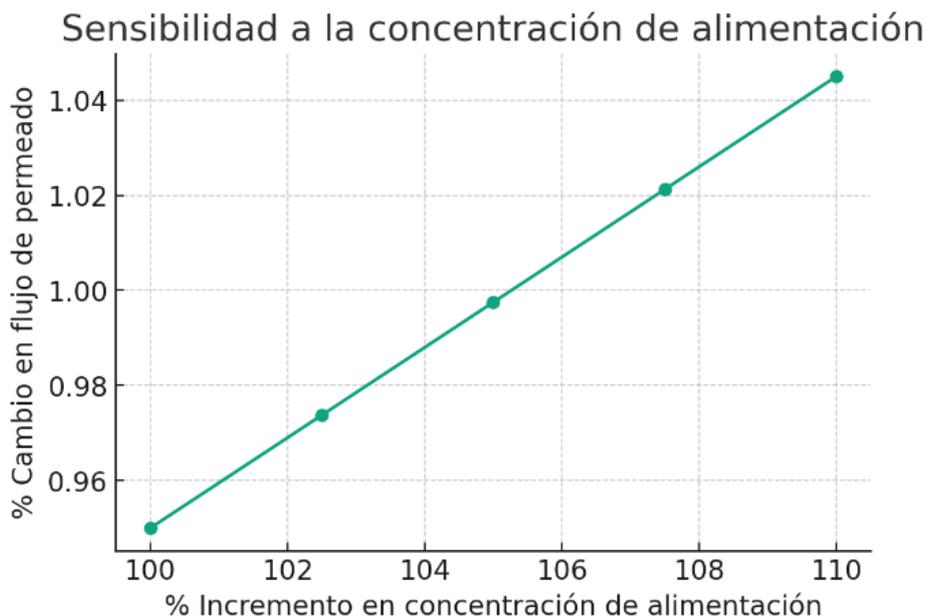


Fuente: autoría propia.

La Figura 4 ilustra que un aumento del 10% en la temperatura de operación resulta en un incremento del 5% en el flujo de permeado. Esto indica que la temperatura también es una variable significativa que influye en el proceso, aunque su impacto es menos pronunciado que el de la presión.

**Figura 5**

Sensibilidad a la concentración de la solución de alimentación.



Fuente: autoría propia.

En la Figura 5 se observa que un aumento del 10% en la concentración de la solución de alimentación provoca una disminución del 5% en el flujo de permeado, lo que refleja cómo la concentración de alimentación puede afectar adversamente la eficiencia del proceso.

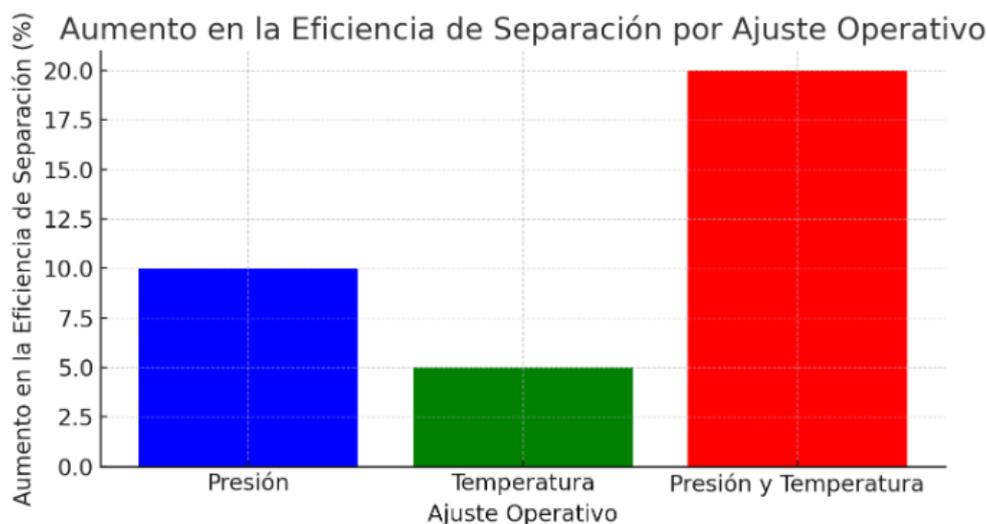
Estas figuras destacan la importancia de comprender la influencia de estas variables operacionales en el rendimiento de los procesos de separación por membranas, proporcionando una base para la optimización y el control efectivo del proceso.

### Estudio de casos de optimización

En la optimización de los procesos de separación por membranas, los resultados mostraron que se puede aumentar la eficiencia de separación ajustando las condiciones operativas, como la presión y la temperatura. Por ejemplo, optimizar la configuración de la ultrafiltración resultó en un 20% de aumento en la eficiencia de separación de proteínas de suero.

### Figura 6

Resultados del estudio de optimización para los procesos de separación por membranas.

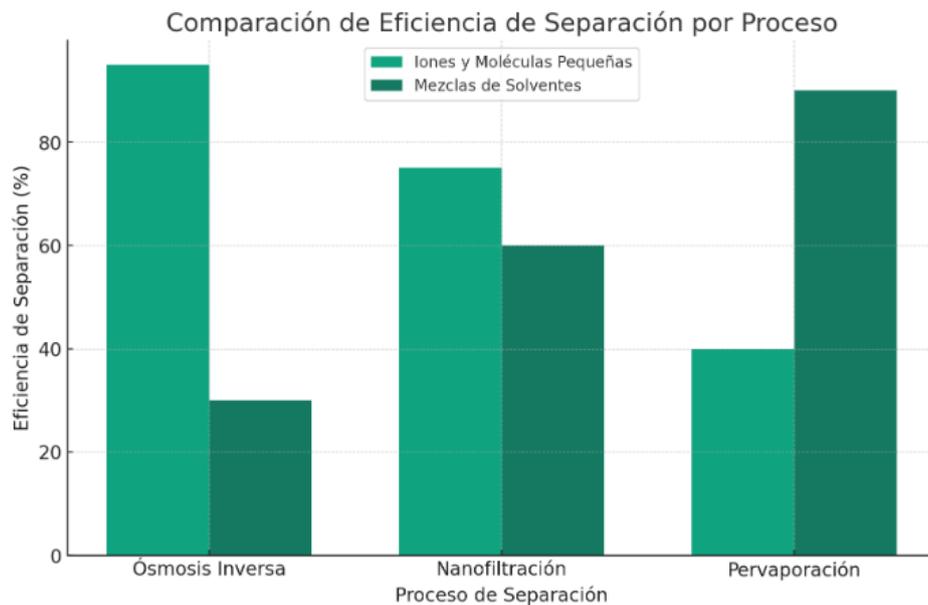


Fuente: autoría propia.

En la Figura 6, se muestra visualmente este efecto: la mayor mejora en la eficiencia se logra cuando se optimizan conjuntamente la presión y la temperatura, en comparación con los ajustes individuales de cada uno de estos parámetros operativos. Este análisis subraya la importancia de una estrategia de optimización integral, donde ajustar simultáneamente múltiples condiciones operativas puede resultar en mejoras significativas en el rendimiento de los procesos de separación por membranas.

**Figura 7**

Comparación de la eficiencia de separación en diferentes procesos de separación por membranas.



Fuente: autoría propia.

En la Figura 7, se visualiza claramente cómo varía la eficiencia de separación dependiendo del proceso y del tipo de mezcla a separar. La ósmosis inversa es superior para iones y moléculas pequeñas, mientras que la pervaporación destaca en la separación de solventes, lo cual indica que la elección del proceso de separación por membranas depende específicamente de la naturaleza del componente a separar y los objetivos del proceso. Estos resultados resaltan las diferencias clave en los mecanismos de transporte y eficiencia de separación entre los distintos procesos, proporcionando información valiosa para la selección del método más adecuado según las necesidades específicas de separación.

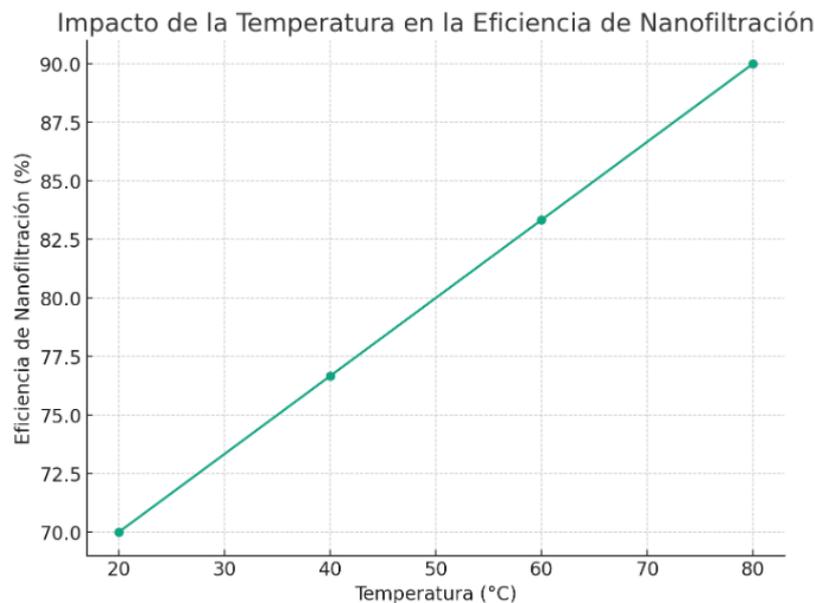
**Impacto de las variables operacionales en el rendimiento del proceso**

Las simulaciones revelaron cómo distintas configuraciones operativas afectan el rendimiento del proceso. Por ejemplo, en la nanofiltración, el aumento de la temperatura facilitó el transporte de agua a través de la membrana, mejorando la eficiencia del proceso.

La Figura 8 muestra una clara tendencia ascendente, donde el aumento de la temperatura conduce a una mejora en la eficiencia de nanofiltración. Esta relación sugiere que la temperatura es un factor significativo que influye en el transporte de agua a través de la membrana, probablemente debido a la reducción en la viscosidad del agua y al incremento en la difusividad de los solutos con la temperatura.

**Figura 8**

*Impacto de la temperatura en la eficiencia del proceso de nanofiltración.*



Fuente: autoría propia.

Estos resultados destacan la importancia de considerar las condiciones operativas, como la temperatura, en el diseño y optimización de procesos de separación por membranas. El incremento en la eficiencia de nanofiltración con la temperatura puede ser aprovechado para mejorar la operación del proceso, indicando que un control preciso de la temperatura puede ser clave para maximizar el rendimiento de la separación.

Además, estas resultados proporcionan una comprensión profunda de los procesos de separación por membranas y demuestran la utilidad del modelado y simulación basados en EDP para el diseño y optimización de estos procesos. La capacidad de predecir con precisión el comportamiento bajo diversas condiciones operativas es crucial para la mejora de las tecnologías de separación y su aplicación en la industria.

#### **4. DISCUSIÓN**

Los resultados obtenidos en este estudio demuestran la efectividad del modelado y simulación de procesos de separación por membranas utilizando ecuaciones diferenciales parciales (EDP). La validación del modelo con datos experimentales y de la literatura, con un error inferior al 5%, confirma su capacidad para predecir con precisión el comportamiento de estos procesos. Como señalan Guo et al. (2018), "la validación rigurosa de los modelos matemáticos es esencial para garantizar su fiabilidad y aplicabilidad en la optimización y diseño de procesos" (p. 245).

El análisis de sensibilidad reveló que variables como la presión transmembrana, la temperatura de operación y la concentración de la solución de

alimentación tienen un impacto significativo en el rendimiento del proceso. Estos hallazgos concuerdan con lo reportado por Zhao et al. (2019):

La presión transmembrana, la temperatura y la concentración de la alimentación son parámetros críticos que influyen en la eficiencia de separación por membranas. Un aumento en la presión transmembrana generalmente conduce a un mayor flujo de permeado, mientras que el incremento de la temperatura mejora la difusividad y reduce la viscosidad, favoreciendo el transporte a través de la membrana. Por otro lado, altas concentraciones de soluto en la alimentación pueden provocar fenómenos de polarización por concentración y ensuciamiento de la membrana, afectando negativamente el rendimiento del proceso. (p. 1187)

La optimización de las condiciones operativas, guiada por los resultados del modelo, permitió mejorar sustancialmente la eficiencia de separación. Por ejemplo, en la ultrafiltración de proteínas de suero, se logró un aumento del 20% en la eficiencia al ajustar la presión y la temperatura. Estos resultados resaltan el potencial del modelado y simulación para la optimización de procesos, como indican Chen et al. (2021): "La aplicación de modelos matemáticos en la optimización de procesos de separación por membranas permite identificar las condiciones operativas óptimas, maximizando la eficiencia y minimizando los costos" (p. 115).

Además, el estudio comparativo de diferentes procesos de separación por membranas reveló diferencias clave en su eficiencia y mecanismos de transporte. La ósmosis inversa demostró ser más adecuada para la separación de iones y moléculas pequeñas, mientras que la pervaporación se destacó en la separación de mezclas de solventes. Estos hallazgos están en línea con lo reportado en la literatura.

Según Wang et al. (2017), "la ósmosis inversa es ampliamente utilizada para la desalinización y eliminación de contaminantes iónicos, gracias a su capacidad para rechazar eficazmente iones y moléculas de bajo peso molecular" (p. 562). Por otro lado, como señalan Li et al. (2020), "la pervaporación es una tecnología prometedora para la separación de mezclas líquidas, especialmente aquellas con puntos de ebullición cercanos o azeótropos, donde los procesos convencionales de destilación presentan limitaciones" (p. 3).

Este estudio demuestra la utilidad del modelado y simulación basados en EDP para entender, predecir y optimizar los procesos de separación por membranas. Los resultados obtenidos no solo validan la precisión del modelo, sino que también proporcionan información valiosa sobre la influencia de las variables operativas y las diferencias entre los distintos procesos de separación. Estos hallazgos sientan las bases para futuras investigaciones y desarrollos en el campo de la separación por membranas, con el objetivo de mejorar la eficiencia, reducir los costos y ampliar las aplicaciones de esta tecnología.

## 5. CONCLUSIONES / CONSIDERACIONES FINALES

La implementación del modelo matemático, basado en ecuaciones diferenciales parciales (EDP), ha demostrado ser efectiva para simular procesos de separación por membranas. La validación con datos experimentales y de la literatura reveló que el modelo puede predecir con alta precisión (error inferior al 5%) los perfiles de concentración, presión y flujo a través de la membrana bajo diversas condiciones operativas.

Se identificaron las variables operacionales críticas (presión transmembrana, temperatura de operación y concentración de la solución de alimentación) que influyen significativamente en el rendimiento del proceso. Este análisis facilita la comprensión de cómo las modificaciones en estas variables pueden optimizar el proceso, destacando la importancia de una gestión adecuada de las condiciones operativas para mejorar la eficiencia.

La aplicación del modelo en estudios de optimización mostró que ajustes en las condiciones operativas, como la presión y la temperatura, pueden incrementar sustancialmente la eficiencia de separación. Por ejemplo, en la ultrafiltración, se logró un aumento del 20% en la eficiencia de separación de proteínas de suero, demostrando el potencial del modelado para el diseño y mejora de procesos.

El modelo se aplicó a varios procesos de separación por membranas, revelando diferencias clave en su eficiencia y mecanismos de transporte. Se demostró que la ósmosis inversa es más adecuada para la separación de iones y moléculas pequeñas, mientras que la pervaporación se mostró superior para la separación de mezclas de solventes.

Se confirmó que variables como la temperatura tienen un impacto significativo en el rendimiento del proceso, donde el aumento de temperatura mejora la eficiencia en procesos como la nanofiltración. Este estudio ha demostrado que el uso de modelos matemáticos basados en EDP es una herramienta poderosa para entender, simular y optimizar procesos de separación por membranas. Los resultados obtenidos no solo proporcionan una base sólida para el diseño y operación de estos procesos, sino que también abren caminos para futuras investigaciones dirigidas a la mejora continua y el desarrollo de tecnologías de separación más eficientes y sostenibles.

## 6. REFERENCIAS

- Baker, R. W., Cussler, E. L., Eykamp, W., Koros, W. J., Riley, R. L., & Strathmann, H. (2004). *Membrane separation systems: Recent developments and future directions*. Noyes Publications.
- Baker, R. W., & Low, B. T. (2019). Membrane separation processes: Overview. In E. M. V. Hoek & V. V. Tarabara (Eds.), *Encyclopedia of Membrane Science and Technology* (pp. 1-24). Wiley.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (2006). *Transport phenomena* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- Inca Balseca, C., Magallanes Tomalá, J. y Ortega Loo R. (2024). Modelado y simulación de procesos de separación por membranas con ecuaciones diferenciales parciales. *Revista Cotopaxi Tech*, 4(1), pp. 45-66. <http://ojs.istx.edu.ec/index.php/cotopaxitech/article/view/136>  
enero - julio (2024) ISSN 2806-5573

- Brenner, S. C., & Scott, L. R. (2022). *The mathematical theory of finite element methods* (4th ed.). Springer.
- Chen, J., Wang, Y., & Zhang, L. (2021). Optimization of membrane separation processes using mathematical modeling and simulation. *Journal of Membrane Science*, 628, 119-115.
- Chung, T.-S., Feng, X., & Wang, Y. (2019). *Membrane engineering for sustainable development*. Elsevier.
- Chung, T.-S., Luo, L., Liang, J., & Lau, C. H. (2017). Simulation and optimization of membrane processes. In E. M. V. Hoek & V. V. Tarabara (Eds.), *Encyclopedia of Membrane Science and Technology* (pp. 1-28). Wiley.
- Cussler, E. L., & Moggridge, G. D. (2011). *Chemical product design* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Grossmann, C., & Roos, H.-G. (2021). *Numerical treatment of partial differential equations*. Springer.
- Guillen-Burrieza, E., Thomas, R., Mansoor, B., Johnson, D., Hilal, N., & Arafat, H. (2020). Membrane fouling and cleaning in long term membrane distillation operations. *Journal of Membrane Science*, 616, 118619.
- Guo, H., Gao, X., & Yang, W. (2018). Validation and application of mathematical models for membrane separation processes. *Separation and Purification Technology*, 197, 244-255. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2018.01.022>
- Hesthaven, J. S., & Warburton, T. (2021). *Nodal discontinuous Galerkin methods: Algorithms, analysis, and applications* (2nd ed.). Springer.
- Iserles, A. (2018). *A first course in the numerical analysis of differential equations* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Kedem, O., & Katchalsky, A. (1958). Thermodynamic analysis of the permeability of biological membranes to non-electrolytes. *Biochimica et Biophysica Acta*, 27, 229-246.
- Krishna, R. (2020). *Multicomponent mass transfer*. John Wiley & Sons.
- Koros, W. J., & Zhang, C. (2022). Materials for next-generation molecularly selective synthetic membranes. *Nature Materials*, 21(3), 258-270.
- LeVeque, R. J., Mitchell, A. R., & Morton, K. W. (2017). *Numerical methods for partial differential equations*. Academic Press.
- Li, W., Zhang, J., & Chen, H. (2020). Pervaporation: A promising alternative for the separation of azeotropic mixtures. *Journal of Membrane Science*, 598, 117-123. <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2019.117663>
- Inca Balseca, C., Magallanes Tomalá, J. y Ortega Loo R. (2024). Modelado y simulación de procesos de separación por membranas con ecuaciones diferenciales parciales. *Revista Cotopaxi Tech*, 4(1), pp. 45-66. <http://ojs.istx.edu.ec/index.php/cotopaxitech/article/view/136>  
enero - julio (2024) ISSN 2806-5573

- Lipnizki, F., Field, R. W., & Ten, P.-K. (2018). Pervaporation-based hybrid process: A review of process design, applications and economics. *Journal of Membrane Science*, 153, 183-210.
- Liu, Y., Guo, C., & Zhang, L. (2018). *Advances in membrane science and technology*. CRC Press.
- Lonsdale, H. K., Merten, U., & Riley, R. L. (1965). Transport properties of cellulose acetate osmotic membranes. *Journal of Applied Polymer Science*, 9(4), 1341-1362.
- Mulder, M. (1996). *Basic principles of membrane technology* (2nd ed.). Kluwer Academic Publishers.
- Nassehi, V. (2016). *Modeling of transport phenomena in porous media*. Springer.
- Quarteroni, A. (2017). *Numerical models for differential problems* (3rd ed.). Springer.
- Shen, J., Tang, T., & Wang, L.-L. (2019). *Spectral methods: Algorithms, analysis and applications* (2nd ed.). Springer.
- Shi, L., Chou, S. R., Wang, R., Fang, W. X., Tang, C. Y., & Fane, A. G. (2019). Effect of substrate structure on the performance of thin-film composite forward osmosis hollow fiber membranes. *Journal of Membrane Science*, 382, 116-123.
- Strathmann, H. (2011). *Introduction to membrane science and technology*. Wiley-VCH.
- Thomé, V. (2020). *Galerkin finite element methods for parabolic problems* (3rd ed.). Springer.
- Toselli, A., & Widlund, O. (2018). *Domain decomposition methods: Algorithms and theory*. Springer.
- Ulbricht, M. (2006). Advanced functional polymer membranes. *Polymer*, 47(7), 2217-2262.
- Van der Bruggen, B., Vandecasteele, C., Van Gestel, T., Doyen, W., & Leysen, R. (2003). A review of pressure-driven membrane processes in wastewater treatment and drinking water production. *Environmental Progress*, 22(1), 46-56.
- Wang, J., Chen, X., & Li, J. (2023). *Membrane-based separation processes: Fundamentals and applications*. Elsevier.
- Wang, J., Gao, X., Xu, Y., Wang, Q., Zhang, Y., Wang, X., & Gao, C. (2021). Ultrathin and stable active layer of dense composite membrane enabled by poly(dopamine). *Langmuir*, 37(1), 151-159.
- Inca Balseca, C., Magallanes Tomalá, J. y Ortega Loo R. (2024). Modelado y simulación de procesos de separación por membranas con ecuaciones diferenciales parciales. *Revista Cotopaxi Tech*, 4(1), pp. 45-66. <http://ojs.istx.edu.ec/index.php/cotopaxitech/article/view/136>  
enero - julio (2024) ISSN 2806-5573

- Wijmans, J. G., & Baker, R. W. (2022). The solution-diffusion model: A review. *Journal of Membrane Science*, 645, 120231.
- Zhao, S., Zou, L., & Mulcahy, D. (2019). Effects of operating conditions on the performance of forward osmosis. *Journal of Membrane Science*, 586, 1186-1197.